

U. Didáctica 4: Proporcionalidad.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

Razón: Una razón es la división de dos cantidades y se representa en forma de fracción.

En una razón, tanto el antecedente como el consecuente pueden ser decimales; sin embargo, en una fracción tanto el numerador como el denominador son enteros.

Ejemplo: $\frac{3\pi}{4}$

Se lee: "3π es a 4"

Proporción: es la igualdad de dos razones.

Ejemplo: $\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$

Al 6 y al 2 se les llama *extremos*, y al 3 y al 4 *medios*. Se lee: "6 es a 3 como 4 es a 2".

Propiedad fundamental de las proporciones: El producto de medios igual a producto de extremos.

Ejemplo: $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} \Rightarrow 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$

Cuarto proporcional. De los cuatro términos de una proporción, si se desconoce uno de ellos se le llama *cuarto proporcional*.

Ejemplo: $\frac{4}{12} = \frac{6}{x} \Rightarrow$ Para calcular el cuarto proporcional se utiliza la propiedad fundamental de las proporciones: $4 \cdot x = 12 \cdot 6 = 72$.

Para saber qué número multiplicado por 4 me da 72 tengo que dividir 72 entre 4. Por lo tanto:

$$4 \cdot x = 12 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 6}{4} \Rightarrow x = 18$$

Magnitudes directamente proporcionales: Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una, la otra aumenta o disminuye en la misma proporción. Ej.: Las manzanas y su coste. Si aumentamos al doble el peso de las manzanas, aumenta también al doble el valor de las mismas. Lo mismo sucede al triple, o al cuádruple. Podemos construir una tabla de valores:

Kg	1	2	4	6	9
Coste	1,5	3	6	9	13,5

La relación que hay entre los elementos de una magnitud y los de la otra se llama **razón de proporcionalidad** y se indica mediante un cociente: $r = 2/3$.

Quiere decir que si de una magnitud hay 2 unidades, de la otra hay 3.

Ejemplo: Si en una clase de 20 alumnos hay 8 alumnos de Zamora capital y 12 alumnos de los pueblos de alrededor, podemos afirmar que la razón de proporcionalidad entre ambos tipos de alumnos es de 2 a 3, pues $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Cuando las magnitudes son directamente proporcionales, se verifica que los cocientes entre los elementos de una magnitud y los de la otra son iguales, como puede comprobarse en la tabla anterior, y el valor de la razón de proporcionalidad se llama **constante de proporcionalidad**.

Magnitudes inversamente proporcionales: Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una disminuye la otra o cuando al disminuir una aumenta la otra en la misma proporción. Ej.: Nº de personas y nº de días que les dura una caja de peras: si aumentamos el número de personas al doble, disminuye el número de días a la mitad. Podemos construir una tabla de valores:

Nº de personas	4	3	1	2	8	6
Nº de días	12	16	48	24	6	8

La **constante de proporcionalidad inversa** es el **producto** de los elementos de una magnitud por los de la otra. Este producto ha de ser siempre igual: $K = 4 \cdot 12 = 3 \cdot 16 = 1 \cdot 48$

Ejercicios

1. De los siguientes pares de magnitudes, indica si son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o si no tienen relación de proporcionalidad.

- a) El número de asistentes a un concierto y el dinero recaudado con las entradas.
- b) El número de trabajadores para hacer una mudanza y el tiempo que tardan en hacerla.
- c) El peso de una persona y su altura.
- d) El número de zancadas que da un corredor en un minuto y el espacio recorrido en ese tiempo.
- e) El número de invitados a una fiesta y el tamaño de la porción de tarta que toma cada uno.

2. Indica el tipo de proporcionalidad que hay en cada tabla y complétalas.

a)

Peso de fresas (kg)	2	1	3		8
Precio (€)	6			15	

b)

Núm. de grifos en una piscina	2	1	3		
Tiempo de llenado (min)	60			30	20

REGLA DE TRES

- La **regla de tres simple y directa** consiste en una relación de cantidades con proporcionalidad directa, que se da cuando dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes **directamente proporcionales**, se debe calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud.

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{D} C \\ A_2 \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{C}{x} \Rightarrow x = \frac{A_2 \cdot C}{A_1}$$

La **regla de tres directa** la aplicaremos cuando una magnitud aumenta y la otra también lo hace, o si la una magnitud disminuye y la otra disminuye de igual forma.

- La **regla de tres simple e inversa** consiste en una relación de cantidades con proporcionalidad inversa, que se da cuando dadas dos cantidades correspondientes a magnitudes **inversamente proporcionales**, se debe calcular la cantidad de una de estas magnitudes correspondiente a una cantidad dada de la otra magnitud.

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \xrightarrow{I} C \\ A_2 \longrightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{C}{x} \Rightarrow x = \frac{A_1 \cdot C}{A_2}$$

La **regla de tres inversa** la aplicaremos cuando una magnitud aumenta y la otra disminuye, o viceversa. Notar que para calcular la regla de tres inversa se colocan los datos igual que en la directa, pero, al formar la proporción, una de las razones se invierte, siendo aconsejable invertir aquélla en la que no esté la incógnita.

Ejemplo: Seis albañiles tardan 8 meses en realizar una obra. ¿Cuánto tardarían 2 albañiles? (Nota: Es aconsejable escribir una I mayúscula, de Inversa, entre las dos magnitudes relacionadas y rodearla con un círculo de color rojo)

Albañiles	I	Tiempo
6	→	8 meses
2	→	X meses

$$\frac{2}{6} = \frac{8}{x} \rightarrow 2x = 6 \cdot 8 \rightarrow x = \frac{6 \cdot 8}{2} \rightarrow x = 24 \text{ meses}$$

- Si seis cobayas necesitan 10 sacos de alfalfa a la semana, ¿cuántos sacos necesitarán nueve cobayas para comer durante una semana?
- Alba, Berta y Carlos tardan 4 horas en preparar juntos un trabajo de inglés. ¿Cuánto tardarían David y Elena en preparar el mismo trabajo?
- En el supermercado en el que compra Fran, dos cajas de bombones pesan 1,6 kg.
 - ¿Cuánto pesan 12 cajas?
 - Las cestas del supermercado soportan un peso total de 18 kg, ¿se pueden cargar 25 cajas de bombones en una sola cesta?

6. Para hacer una remodelación en el gimnasio de un instituto se necesitan 14 obreros durante 45 días. Si contratan a 16 obreros más, ¿cuántos días necesitarán para hacer la misma obra trabajando al mismo ritmo?

REPARTOS PROPORCIONALES

- Un **reparto directamente proporcional** consiste en que dadas unas magnitudes de un mismo tipo y una magnitud total, calcular la parte correspondiente a cada una de las magnitudes dadas

Para repartir una cantidad N de forma directamente proporcional a A, B, C, \dots , se realizan los siguientes pasos

1. Se calcula la razón de proporcionalidad: $k = \frac{N}{A+B+C+\dots}$
2. Se multiplica cada parte A, B, C, \dots por k : $A \cdot k = A', B \cdot k = B', C \cdot k = C', \dots$

- Un **reparto inversamente proporcional** consiste en que dadas unas magnitudes de un mismo tipo y una magnitud total N , debemos hacer un reparto directamente proporcional a las inversas de las magnitudes.

Para repartir una cantidad N de forma inversamente proporcional a A, B, C, \dots , se reparte esa misma cantidad de forma directamente proporcional a sus inversos, es decir, a $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \dots$, es decir

1. Se calcula la razón de proporcionalidad: $k = \frac{N}{\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \dots}$
2. Se multiplica cada parte $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \dots$ por k : $\frac{1}{A} \cdot k = A', \frac{1}{B} \cdot k = B', \frac{1}{C} \cdot k = C', \dots$

7. Guillermo ha preparado un total de 1200 g de masa para bizcocho. Quiere repartirla en tres moldes de manera directamente proporcional a sus capacidades, que son 600, 800 y 1.000 mL. ¿Cuánta masa debe echar en cada molde?

8. Héctor, Irene y Jimena ganan un premio de fotografía de 450 €, y deciden repartirlo de manera inversamente proporcional a sus edades. Si Héctor tiene 20 años, Irene tiene 15 y Jimena tiene 30, ¿cuánto dinero le corresponde a cada uno de los tres?

PORCENTAJES

Los **porcentajes** expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales e indican la cantidad que corresponde a una de ellas cuando la otra es exactamente 100

Para calcular el porcentaje de algo se opera como si fuera la fracción centésima de ese algo.

$$3\% \text{ de } 80 = \frac{3}{100} \text{ de } 80 = \frac{3}{100} \cdot 80 = \frac{3 \cdot 80}{100} = 2,4$$

Para hallar la cantidad final de otra a la que se le aplica un $r\%$ de aumento o disminución, multiplicamos la cantidad inicial por el llamado índice de variación.

Índice de variación de aumento	Índice de variación de disminución
$\left(1 + \frac{r}{100}\right)$	$\left(1 - \frac{r}{100}\right)$

Ejemplos:

- Un frigorífico de 430 € lo han subido el 10 %. ¿Cuánto cuesta ahora?
Índice de variación de aumento = $1 + \frac{10}{100} = 1 + 0,1 = 1,1$
 $430 \cdot 1,1 = 473 \text{ €}$
- Un frigorífico de 430 € lo han rebajado el 10 %. ¿Cuánto cuesta ahora?
Índice de variación de disminución = $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,1 = 0,9$
 $430 \cdot 0,9 = 387 \text{ €}$

9. Calcula los siguientes porcentajes.

a) 4 % de 500	
b) 15 % de 1500	
c) 80 % de 900	
d) 30 % de 90	
e) 25 % de 180	
f) 40 % de 1000	

10. Rellena los huecos en cada una de las siguientes expresiones.

a) 50 % de ____ = 20	
b) ____ % de 300 = 15	
c) 15 % de ____ = 30	
d) ____ % de 150 = 30	

- 11.** Indica qué porcentaje aumenta o disminuye una cantidad al multiplicarla por los siguientes números.

a) 1,38	
b) 0,75	
c) 0,98	
d) 1,02	

- 12.** En una clase de 2º ESO de 30 alumnos, hoy han faltado 6 niños. ¿Cuál es el porcentaje de ausencias? ¿Y el de asistencia?

- 13.** Elena ha conseguido una subida de su sueldo del 4 %, lo que supone 70 € al mes. ¿Cuánto cobraba mensualmente antes de la subida?

- 14.** Jacinto comenzó el año pesando 90 kg. Después de 3 meses a dieta pesa 81 kg. ¿Qué porcentaje de su peso inicial ha perdido?

- 15.** Claudia ha subido en matemáticas un 8 % con respecto al anterior examen, llegando al 8,1. ¿Qué nota obtuvo en el examen anterior?

16. Marta ha comprado un abrigo que estaba rebajado un 10 % y, al pagar en caja, le aplican un descuento extra del 15 % sobre el precio rebajado por estar en las segundas rebajas. Si el precio inicial del abrigo era de 80 €, ¿cuál es el precio final del abrigo?

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Se dice **proporcionalidad compuesta** cuando en una proporción intervienen más de dos magnitudes y hay que hallar un dato de alguna de ellas. Para formar la proporción hay que proceder como si sólo hubiera dos magnitudes: una la de la incógnita y la otra formada por las demás, multiplicando sus razones de proporcionalidad. Si alguna de las magnitudes es inversa con respecto a la de la incógnita habrá que poner su razón inversa.

- *Ejemplo.* Para mantener 6 caballos durante 20 días se necesitan 1.100 kg de heno. ¿Cuántos caballos se alimentarán con 4.950 kg durante 60 días?

	I	D
Nº Caballos	Días	Kg de heno
6	20	1100
x	60	4950

Para saber cuál de las magnitudes es inversa o directa nos podemos preguntar cómo se comporta cada una con respecto a la magnitud que tiene la incógnita. Así, por ejemplo, en este problema nos podemos preguntar: si el número de caballos aumenta (magnitud donde está la incógnita), ¿tendrán comida para más días o para menos días? Es evidente que con la misma cantidad de comida tendrán para menos días si el número de caballos aumenta, luego la magnitud Días es inversa con respecto a la magnitud número de Caballos. Una pregunta similar nos formularemos para saber cómo es la otra magnitud: si aumenta el número de caballos, ¿tendrá que aumentar la comida? Es evidente que sí, por lo que la magnitud cantidad de Heno es directa con respecto a la magnitud número de Caballos. Por tanto se plantea la siguiente proporción

$$\frac{6}{x} = \frac{60}{20} \cdot \frac{1100}{4950} \rightarrow 60 \cdot 1100 \cdot x = 6 \cdot 20 \cdot 4950 \rightarrow x = \frac{6 \cdot 20 \cdot 4950}{60 \cdot 1100} = \frac{594000}{66000} = 9 \text{ meses}$$

17. Calcula el valor de x en las siguientes igualdades.

a) $\frac{x}{7} = \frac{90}{135} \cdot \frac{15}{35}$	
b) $\frac{x}{2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{4}$	
c) $\frac{7}{x} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{10}$	
d) $\frac{4}{x} = \frac{2}{8} \cdot \frac{40}{100}$	

- 18.** Raúl tiene un acuario en su habitación con 20 peces. Para darles de comer emplea botes de comida para peces de 600 g, y cada uno le dura 30 días. Responde a las siguientes preguntas.
- a) ¿Cuánto comen los 20 peces en una semana?
 - b) Si consigue 10 peces más, ¿cuánto durará cada bote de comida?
- 19.** Una agencia de transportes publica la siguiente oferta para mudanzas: “Trasladamos 10 km cada caja de tu mudanza por 3 €”
- a) Manuel se quiere mudar a 30 km, y tiene un total de 50 cajas para mover. ¿Cuánto le costará?
 - b) Ángela tiene un presupuesto máximo de 360 € para irse a vivir a 25 km de su casa actual. ¿Cuántas cajas puede trasladar?
- 20.** Daniela lee un libro en 8 días dedicando 3 horas diarias a razón de 15 páginas por hora. ¿Cuántas horas diarias debe leer para acabar el libro en 20 días a razón de 9 páginas por hora?

- 21.** Una tienda de alfombras fija el precio de sus artículos proporcionalmente a su ancho y a su largo. Si una alfombra que mide 3,6 m de largo y 0,8 m de ancho cuesta 120€, ¿cuánto costará otra alfombra del mismo material que mide 2,4 m de largo y 1,2 m de ancho?
- 22.** Si 20 bombillas halógenas consumen 6 vatios durante 9 horas, ¿cuántos vatios consumen 100 bombillas halógenas durante 45 horas?
- 23.** Tres obreros trabajando 8 horas diarias realizan un trabajo en 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando durante 9 horas diarias?
- 24.** Andrea y Blanca están preparando un viaje por toda Europa. Han calculado que necesitan un total de 7.200€ para poder viajar durante 6 meses. Carlos, Delia, Ernesto y Fernando quieren ir de viaje con ellas, ¿cuánto tiempo podrán ir los seis juntos si tienen en total 21.600€?